令和６年度・個別学力検査

数　　学（デ）

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 試験開始後，すべての解答用紙に氏名（カタカナ）及び受験番号を記入しなさい。受験番号が正しく記入されていない場合は，採点できないことがあります。また，氏名（カタカナ）及び受験番号以外の文字，数字などは，絶対に記入してはいけません。
3. 答案は解答用紙の各問題番号の欄に記入しなさい。
4. 問３は選択問題です。（A），（B）の二問のうち一方だけを選択し，解答用紙には選択した問に必ずマルを付けた上で解答しなさい。なお，両方解答した答案やマルを付けなかった答案は０点になることがあります。
5. 問４は選択問題です。（C），（D）の二問のうち一方だけを選択し，解答用紙には選択した問に必ずマルを付けた上で解答しなさい。なお，両方解答した答案やマルを付けなかった答案は０点になることがあります。
6. 解答用紙の裏面には何も書いてはいけません。
7. 試験終了後，問題冊子および下書用紙は持ち帰りなさい。

すべての問題について，答案では求める手順をわかりやすく説明しなさい。

1. 正四面体OABCに対して，平面OAB上の点Pが $5\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{PA}} - 3\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を満たしている。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2) △ABCの重心Gと点Pを通る直線が平面OACと交わる点をQとする。$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ で表せ。

(3) 線分OA上の点Rに対して，△PQRがPQを斜辺とする直角三角形になるとき，$\dfrac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OA}}$ を求めよ。

2. n を自然数とする。1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 枚のカードがある。次の問いに答えよ。

(1) $n = 18$ とする。18 枚のカードから 2 枚のカードを同時に取り出すとき，取り出した 2 枚のカードの番号の和が 3 の倍数になる確率を求めよ。

(2) $n = 20$ とする。20 枚のカードから 17 枚のカードを同時に取り出すとき，取り出した 17 枚のカードの番号の和が 3 の倍数になる確率を求めよ。

(3) m を自然数とし，$n = 3m + 2$ とする。n 枚のカードから $n - 3$ 枚のカードを同時に取り出すとき，取り出した $n - 3$ 枚のカードの番号の和が 3 の倍数となる確率を m を用いて表せ。

3. 以下の (A)，(B) の問題のうち，一方だけを選択し解答せよ。また解答用紙には必ず選択解答した問題にマルを付けること。

(A) $a_n = 3^n - 2^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。次の問いに答えよ。

(1) $n \geqq 2$ のとき，$a_{n+4} - a_n$ が 20 の倍数であることを示せ。

(2) a_n を 20 で割った余りを b_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする。m を自然数 $(m = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，b_{4m-3} を求めよ。

(3) $a_n + 4n$ を 10 で割った余りを c_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする。c_1 から c_{20} を求めよ。

(B) $-1 < t < 1$ を満たす t に対して，xy 平面上の直線 $y = t$ と楕円 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の交点を $\mathrm{Q}(-s, t)$, $\mathrm{R}(s, t)(s > 0)$ とする。点 $\mathrm{P}(0, 1)$ に対して，$\triangle \mathrm{PQR}$ の面積を $S(t)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $S(t)$ を求めよ。また，$S(t)$ の最大値とそのときの点 R の座標を求めよ。

(2) 楕円 C 上の点 R における接線 ℓ と x 軸の交点を T とし，$\theta = \angle \mathrm{PRT}$ とする。$S(t)$ が最大値をとるとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(3) 楕円 C で囲まれる図形は直線 PR によって 2 つの部分に分割される。$S(t)$ が最大値をとるとき，2 つの部分のうち原点が属さない方の面積を求めよ。

4. 以下の (C)，(D) の問題のうち，一方だけを選択し解答せよ。また解答用紙には必ず選択解答した問題にマルを付けること。

(C) $f(x)=\cos^3 x+\sin^3 x+\dfrac{1}{2}\cos x\sin x-\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x)$ とし，$t=\cos x+\sin x$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) x が実数全体を動くとき，t の最大値と最小値，およびそれらを与える x を求めよ。

(2) $f(x)$ を t の式として表せ。

(3) x が実数全体を動くとき，$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

(D) 関数 $f(x)=p\sin x$, $g(x)=q\cos x$ $(p>0,\ q>0)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $0\leqq x\leqq\pi$ で曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標を α とする。$\alpha\leqq x\leqq\pi$, $y\geqq 0$ において曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ と x 軸で囲まれた領域の面積 S_1 を p, q を用いて表せ。

(2) $\pi\leqq x\leqq 2\pi$ で曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標を β とする。$\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\beta$, $y\leqq 0$ において曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ と x 軸で囲まれた領域の面積 S_2 を p, q を用いて表せ。

(3) $S_1:S_2=\sqrt{2}+1:\sqrt{2}-1$ であるとき，(1)，(2) における α と β を求めよ。